Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Φυλλάδιο Ασκήσεων 1

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι το θεώρημα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας του Picard εξακολουθεί να ισχύει αν η συνέχεια της* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *στο* D *αντικατασταθεί με συνέχεια στο* $D^* := D \setminus \{(t, y_k) : t \in (a, b), k = 1, \dots, n\}$*, υποθέτοντας επιπλέον ότι* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *είναι φραγμένη στο* D^*.

Άσκηση 2. *Να υπολογιστούν οι πρώτες τρεις προσεγγίσεις Picard για τα ακόλουθα ΠΑΤ:*

$$\begin{aligned} y' &= t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1, \\ y' &= 1 - y^3, \qquad y(-1) = 3, \\ y' &= t(3 - 2y), \qquad y(1) = 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι η μοναδική λύση του ΠΑΤ*

$$y' = y \sin(y) + t, \qquad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4 (Συνεχής εξάρτηση)**.** *Έστω δύο λύσεις* $y, z : (a, b) \to \mathbb{R}$ *των ΠΑΤ:*

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \lambda_1), & y(t_0) = y_0 \\ z' = f(t, z, \lambda_2), & z(t_0) = z_0 \end{cases},$$

όπου $f(t, y, \lambda)$ *Lipschitz ως προς* y, λ *παντού. Δείξτε ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$*, υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε:*

$$|z_0 - y_0| + |\lambda_2 - \lambda_1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |z(t) - y(t)| < \varepsilon,$$

για κάθε $t \in (a, b)$*, όπου* (a, b) *πεπερασμένο.*

Άσκηση 5. *Θεωρήστε τις λύσεις* y_n *της ακολουθίας ΠΑΤ:*

$$y_n' = \frac{1}{n} y_n + y_n^2, \qquad y(0) = \frac{n-1}{n}.$$

Βρείτε αν η y_n *συγκλίνει και πού.*

Άσκηση 6 (Πιο γενική ανισότητα Gronwall)**.** *Έστω συνεχείς συναρτήσεις* $y, z_2, z_1 : [t_0, T] \to \mathbb{R}$*, με* $z_2 \geq 0$*, που ικανοποιούν την ανισότητα:*

$$y(t) \leq z_1(t) + \int_{t_0}^{t} z_2(s) y(s) ds, \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

Να δειχθεί ότι

$$y(t) \leq z_1(t) + \int_{t_0}^{t} z_1(s) z_2(s) e^{\int_s^t z_2(r) dr} ds, \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

Στην περίπτωση που η z_1 *είναι αύξουσα, να δειχθεί ότι*

$$y(t) \leq z_1(t) e^{\int_a^t z_2(s) ds}.$$

Άσκηση 7. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lipschitz (σε όλο το* $\mathbb{R}$*). Δείξτε ότι η λύση του ΠΑΤ:*

$$y' = f(y), \qquad y(t_0) = y_0$$

είναι καθολική, δηλαδή ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Υποδείξεις

1 Αρκεί να δειχθεί ότι η f είναι Lipschitz. Έστω z_1, z_2 σημεία στο D^*, $z_1 < z_2$, και έστω $y_{i_1}, \dots, y_{i_m} \in [z_1, z_2]$, αριθμημένα έτσι ώστε $y_{i_1} < \dots < y_{i_m}$. Παρατηρήστε ότι ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $[z_1, y_{i_1}], [y_{i_2}, y_{i_3}], \dots, [y_{i_{m-1}}, y_{i_m}], [y_{i_m}, z_2]$. Επομένως έχουμε

$$|f(t, z_2) - f(t, z_1)| \le C\big(|z_2 - y_{i_m}| + |y_{i_m} - y_{i_{m-1}}| + \dots + |y_{i_2} - y_{i_1}| + |y_{i_1} - z_1|\big) = C|z_2 - z_1|$$

όπου $C = \sup_{(t,y)\in D^*} |\frac{\partial f}{\partial y}|$.

2 Άμεση εφαρμογή του αναγωγικού τύπου

$$y_{m+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_m)ds, \qquad m \ge 0,\ y_0 = y(0).$$

3 Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης δίνει

$$|y| \le \frac{\pi}{2} + \frac{t^2}{2} + \left|\int_0^t |y| ds\right|$$

Έστω (a, b) το μ.π.ο. της y, $0 \in (a, b)$. Αν $b < +\infty$, τότε $\lim_{t\to b^-} |y| = +\infty$. Παρόλαυτα, η προηγούμενη μαζί με Gronwall έπονται το φράγμα

$$|y| \le (\frac{\pi}{2} + \frac{b^2}{2})e^b, \qquad \forall t \in [0, b).$$

Άτοπο! Άρα $b = +\infty$. Ομοίως δείχνουμε ότι $a = -\infty$. Άρα $(a, b) = \mathbb{R}$.

4 Αφαιρώντας τις ολοκληρωτικές μορφές των δύο εξισώσεων παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|z - y| &\le |z_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, z, \lambda_2) - f(s, y, \lambda_1)| ds\right| \\
&= |z_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, z, \lambda_2) - f(s, z, \lambda_1) + f(s, z, \lambda_1) - f(s, y, \lambda_1)| ds\right| \\
&\le |z_0 - y_0| + \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, z, \lambda_2) - f(s, z, \lambda_1)| + |f(s, z, \lambda_1) - f(s, y, \lambda_1)| ds\right| \\
&\le |z_0 - y_0| + C(b - a)|\lambda_2 - \lambda_1| + \left|\int_{t_0}^{t} C|z - y| ds\right| \qquad (f \text{ Lipschitz ως προς } \lambda, y)
\end{aligned}$$

Για $t \in [t_0, b)$, η Gronwall που δείξαμε στο μάθημα δίνει

$$|z - y| \le \big(|z_0 - y_0| + C(b - a)|\lambda_2 - \lambda_1|\big)e^{C(b-a)}.$$

Η ανάλογη Gronwall για $t \in (a, t_0]$ δίνει το ίδιο φράγμα.[1] Το συμπέρασμα συνεχούς εξάρτησης έπεται.

5 Συγκλίνει για κάθε t σε διάστημα $(-M, 1 - \sigma)$, $M, \sigma > 0$ στη λύση του ΠΑΤ:

$$z' = z^2, \qquad z(0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad z = -\frac{1}{t-1}.$$

Πράγματι, εφαρμόστε την άσκηση 4 για $f(t, y, \lambda) = \lambda y + y^2$, $z = -\frac{1}{t-1}$, $z_0 = 1$, $y = y_n$, $y_0 = 1 - \frac{1}{n}$, $\lambda_1 = \frac{1}{n}$, $\lambda_2 = 0$. Δεδομένου ε, διαλέγουμε n_0: $\frac{2}{n_0} < \delta$. Τότε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει $|z - y_n| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (-M, 1 - \sigma)$, αφού η f είναι y, λ Lipschitz σ' αυτό το διάστημα.

[1] Δείξτε ότι $|y| \le M + C\int_t^{t_0} |y| ds$, για $t \in (a, t_0]$ συνεπάγεται $|y| \le Me^{C(t_0 - a)}$.

6 Θέτουμε $R(t)=e^{-\int_{t_0}^t z_2(s)ds}\int_{t_0}^t z_2(s)y(s)ds$. Υπολογίζουμε

$$R'(t)=z_2(t)e^{-\int_{t_0}^t z_2(s)ds}\left[y(t)-\int_{t_0}^t z_2(s)y(s)ds\right]\le z_1(t)z_2(t)e^{-\int_{t_0}^t z_2(s)ds}$$

Ολοκληρώνουμε σε διάστημα $[t_0,t]$:

$$\begin{aligned} e^{-\int_{t_0}^t z_2(s)ds}\int_{t_0}^t z_2(s)y(s)ds &\le \int_{t_0}^t z_1(s)z_2(s)e^{-\int_{t_0}^s z_2(r)dr}ds \\ \int_{t_0}^t z_2(s)y(s)ds &\le \int_{t_0}^t z_1(s)z_2(s)e^{\int_s^t z_2(r)dr}ds \end{aligned}$$

Άρα

$$y(t)\le z_1(t)+\int_{t_0}^t z_1(s)z_2(s)e^{\int_s^t z_2(r)dr}ds\le z_1(t)+\int_{t_0}^t z_1(s)z_2(s)e^{\int_s^t z_2(r)dr}ds,\qquad \forall t\in[t_0,T).$$

Στην περίπτωση που z_1 αύξουσα, έχουμε $z_1(s)\le z_1(t)$:

$$y(t)\le z_1(t)+z_1(t)\int_{t_0}^t z_2(s)e^{\int_s^t z_2(r)dr}ds=z_1(t)-z_1(t)\int_{t_0}^t \frac{d}{ds}e^{\int_s^t z_2(r)dr}ds=z_1(t)e^{\int_{t_0}^t z_2(s)ds}$$

7 Από την ιδιότητα Lipschitz έπεται $|f(y)|\le|f(0)|+C|y|$. Σε συνδυασμό με την ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσεις παίρνουμε:

$$|y|\le|y_0|+|t-t_0||f(0)|+\left|\int_{t_0}^t C|y|ds\right|.$$

Παίρνοντας περιπτώσεις $t\in[t_0,T_1)$ και $t\in(T_2,t_0]$ για $T_1>t_0>T_2$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα Gronwall για να πάρουμε την εκτίμηση

$$|y|\le\big(|y_0|+|T_2-T_1||f(0)|\big)e^{C(T_2-T_1)}.$$

Έστω (a,b) το μ.π.ο. της y. Αν $a>-\infty$ ή $b<+\infty$, καταλήγουμε μέσω της προηγούμενης εκτίμησης (για $T_1=b$ ή $T_2=a$) ότι $\lim_{t\to a^+}|y|<+\infty$ ή $\lim_{t\to b^-}|y|<+\infty$ αντίστοιχα. Άτοπο λόγω της διχοτομίας που έχουμε κάνει στο μάθημα. Άρα $a=-\infty, b=+\infty$, δηλ. η y είναι καθολική λύση.